



ce
pre
UNI

Aritmética

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL Y DISPERSIÓN

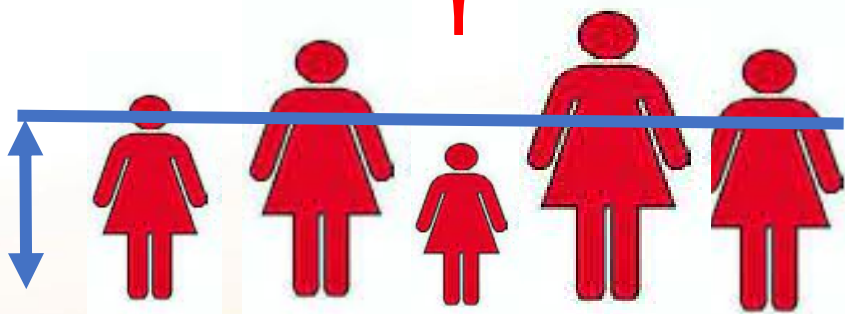
**CICLO
PRE
UNIVERSITARIO
2024 - 1**



MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

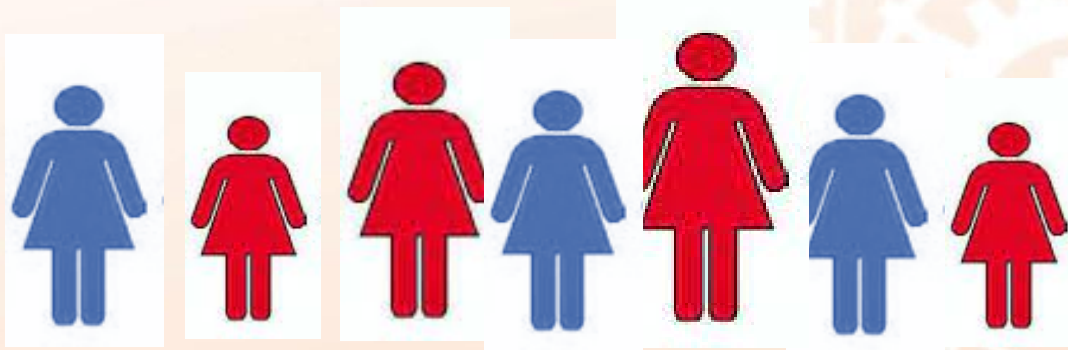
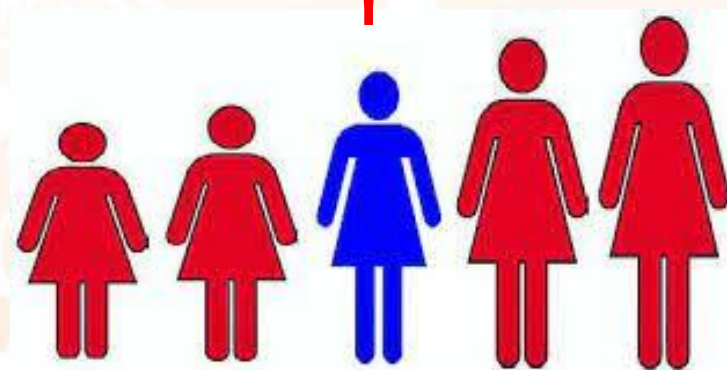
MEDIA

Participan todos los datos



MEDIANA

Ordenado, el dato central

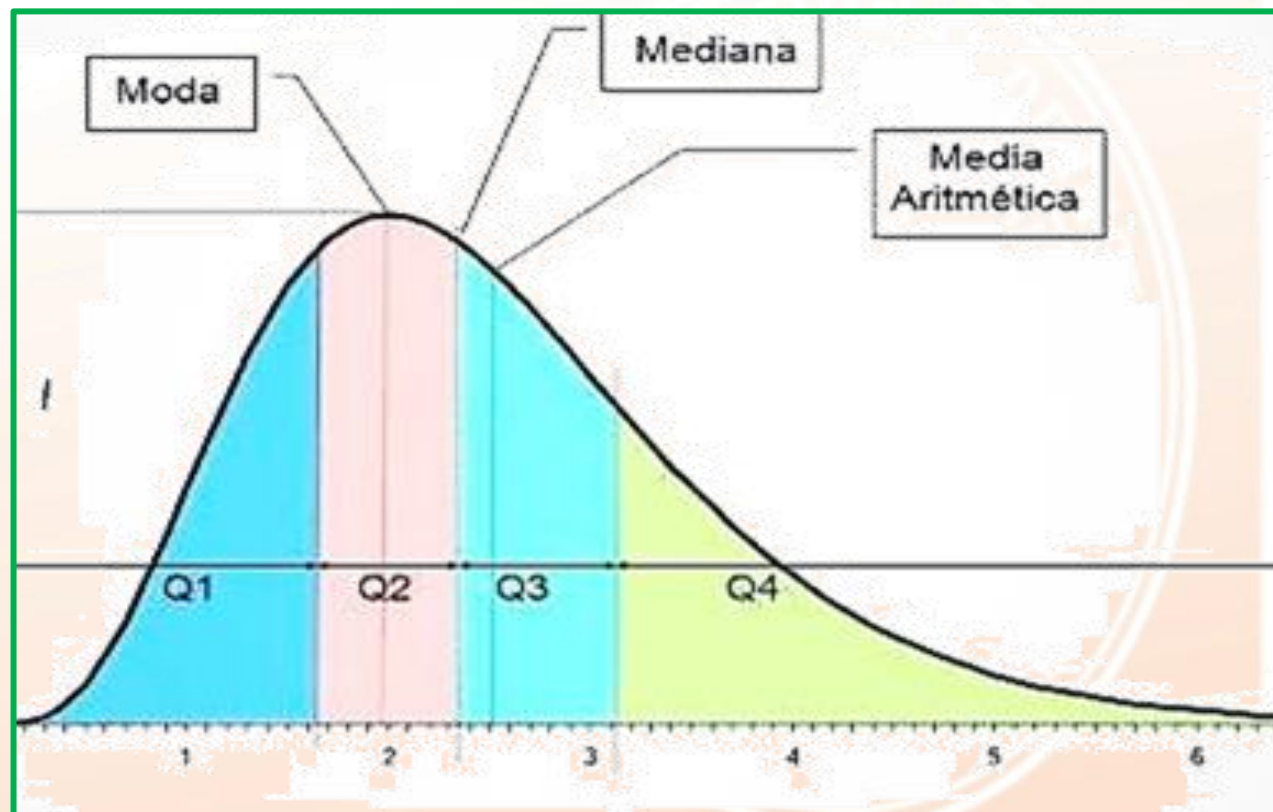


MODA

El dato que más se repite

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Son medidas de centralización de un conjunto de datos, llamados también estadígrafos de posición y es el valor más representativo de un conjunto de datos y no necesariamente uno de ellos. Estudiaremos la MEDIA, MEDIANA Y MODA.


ce
pre
UNI

Media aritmética ($\overline{x}$)

Sea una muestra de un conjunto de valores de una variable cuantitativa de una población, la media aritmética de dichos valores se define como la suma de los mismos entre el número de ellos. Así tenemos los casos siguientes:

I) PARA DATOS NO AGRUPADOS

Sean los valores: $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

De donde :

$$\sum_{i=1}^n x_i = n \cdot [\overline{x}]$$

APLICACIÓN 1

José hace un experimento contando la cantidad de gotas de lluvia que cae por segundo (día muy lluvioso) en un recipiente cuadrado de 1 m de lado. Se observó que el número de gotas de lluvia por segundo que han caído son 14; 21; 30; 41; Calcule la media del numero de gotas de lluvia por segundo, referido a los 20 primeros segundos.

Resolución:

$$N^{\circ} \text{ Gotas} = \overset{(3^2+5)}{14} + \overset{(4^2+5)}{21} + \overset{(5^2+5)}{30} + \overset{(6^2+5)}{41} + \dots + \overset{(22^2+5)}{489}$$

$$N^{\circ} \text{ Gotas} = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 22^2 - 5) + 20 \times 5$$

$$N^{\circ} \text{ Gotas} = \left(\frac{22 \times 23 \times 45}{6} - 5 \right) + 20 \times 5 = 3\,890$$

$$\bar{X} = \frac{3\,890}{20} = 194,5$$

Media Ponderada ($\overline{x}_p$)

Sea un conjunto de datos : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

Pesos asignados a cada dato: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$



$$\overline{x}_p = \frac{\sum x_i \cdot p_i}{\sum p_i} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

APLICACIÓN 2

Para acceder a una plaza docente en cierta Universidad, Jorgito tiene que pasar por diferentes evaluaciones las cuales tienen su respectiva ponderación; estas se muestran en la siguiente tabla. Calcule el promedio obtenido por dicho 'postulante'.

Evaluación	Nota	Peso
Examen escrito	16	5
Clase magistral	12	3
Grado Académico	15	1
Evaluación psicológica	18	4
Entrevista Personal	12	2

Resolución:

$$\overline{X}_p = \frac{16 \cdot (5) + 12 \cdot (3) + 15 \cdot (1) + 18 \cdot (4) + 12 \cdot (2)}{5 + 3 + 1 + 4 + 2}$$

$$\Rightarrow \overline{X}_p = \frac{227}{15} = 15,13$$

Media para datos agrupados

La expresión de la media es:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i \times f_i)}{n}$$

Usando la frecuencia relativa simple:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k (x_i \times h_i)$$

l_i	x_i	f_i	h_i
[; >	x_1	f_1	h_1
[; >	x_2	f_2	h_2
[; >	x_3	f_3	h_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
[; >	x_{k-1}	f_{k-1}	h_{k-1}
[; >	x_k	f_k	h_k

$$\Sigma f_i = n$$

APLICACIÓN 3

La siguiente tabla muestra la distribución de frecuencias de los sueldos de los empleados en una empresa; con intervalos de ancho constante, Determine la media aritmética de los sueldos.

INTERVALO	X_i	f_i	h_i	H_i
$[840 - \square)$			0,10	
$[\quad - \square)$			0,20	0,30
$[\quad - \square)$		105	0,35	
$[\quad - \square)$	1820		0,20	0,85
$[\quad - \square]$			0,15	

Resolución:

$$\Sigma h = 1$$

$$840 + 3,5W = 1820 \rightarrow W = 280$$

$$\rightarrow x_3 = 1540 \quad x_2 = 1260 \quad x_1 = 980 \quad x_5 = 2100$$

$$\overline{x} = 980 \times 0,10 + 1260 \times 0,20 + 1540 \times 0,35 + 1820 \times 0,20 + 2100 \times 0,15$$

$$\overline{x} = 1568$$

Mediana (Me)

La mediana de un conjunto de datos cuantitativos ordenados se define como exactamente el valor central que divide al total de datos en dos partes iguales.

Para datos no agrupados

Si el número de datos es impar la mediana es el dato central.

Ejemplo.

Sean los datos: 12 ; 3 ; 5 ; 17 ; 8 ; 6 ; 14

Ordenando los datos: 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 12 ; 14 ; 17 $\Rightarrow Me = 8$

Si el número de datos es par, la mediana es la media aritmética de los dos datos centrales.

Ejemplo: Sean los datos: 10 ; 2 ; 11 ; 12 ; 9 ; 18

ORDENANDO: 2 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 18 $\Rightarrow Me = \frac{10 + 11}{2} = 10,5$

Mediana para datos agrupados

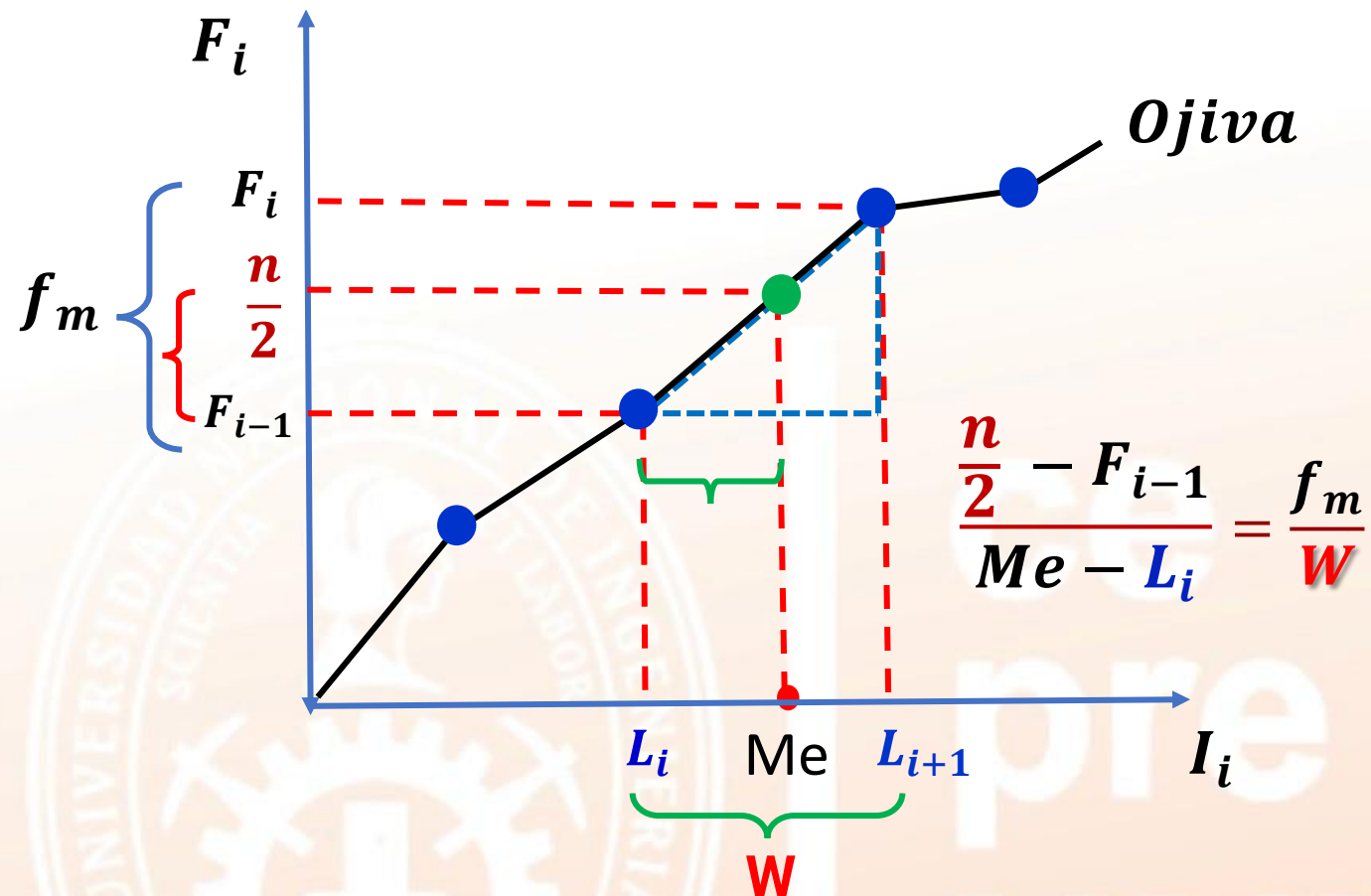
I_i	x_i	f_i	h_i
[; >	x_1	f_1	h_1
[; >	x_2	f_2	h_2
[; >	x_3	f_3	h_3
⋮	⋮	⋮	⋮
[; >	x_{k-1}	f_{k-1}	h_{k-1}
[; >	x_k	f_k	h_k

$$\Sigma f_i = n$$

L_i : límite inferior de la clase mediana

F_{i-1} : número de datos acumulados hasta nivel i-1

fm: frecuencia mediana



$$M_e = L_i + W \left(\frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_m} \right) = L_i + W \left(\frac{\frac{1}{2} - H_{i-1}}{h_m} \right)$$

APLICACIÓN 4

Sabiendo que la mediana en la siguiente tabla de frecuencias es 29; calcule h_4 .

Me →

I	Xi	hi	Hi
[10-18>		0,15	
[18-26>		0,20	0,35
[26-34>		h3	
[34-42>		h4	
[42-50]		0,10	

RESOLUCIÓN

Aplicando: $M_e = L_{i-1} + W \left(\frac{\frac{1}{2} - H_{i-1}}{h_m} \right)$

$w = 8$

$$29 = 26 + 8 \left(\frac{0,5 - 0,35}{h_3} \right) \Rightarrow h_3 = 0,40$$

Además: $0,15 + 0,20 + h_3 + h_4 + 0,10 = 1$

$$\Rightarrow h_4 = 0,15$$

Moda (Mo)

La moda de un conjunto de datos se define como el valor de los datos que mas se repite (mayor frecuencia absoluta).

Para datos no agrupados

Buscamos el dato que más veces se repite en el conjunto de datos (el dato **más frecuente**).

Ejemplos Calcular la moda en cada caso

2, 3, 4, 4, 5, 100 la moda es 4 (unimodal)

1, 6, 6, 7, 9, 9, 10 las modas son 6 y 9 (bimodal)

1, 1, 1, 3, 3, 6, 7, 7, 9 *la moda es 1*

3, 3, 5, 5, 6, 6 *no existe moda*

2, 6, 8, 9, 11, 12, 17 no existe moda

Con datos cualitativos

Ejemplos

- 1) Selección de comidas :
estofado, estofado, lomo saltado, ceviche, ceviche, ceviche, cau cau, cau cau

➡ Moda: **ceviche**

2)

Religión	N° personas
<i>Testigos de Jehová</i>	6
<i>Budista</i>	9
<i>Pentecostés</i>	7
<i>Católico</i>	15
<i>Ateos</i>	4



Moda: Católico

Para datos agrupados

Es el valor que se ubica en el intervalo de mayor frecuencia absoluta.

$$Mo = L_i + W \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$$

Donde:

L_i : límite inferior de la clase modal

W: amplitud del intervalo de clase modal.

d_1 : exceso de la frecuencia modal sobre la frecuencia de la clase inmediatamente anterior a la clase modal

$$d_1 = f_i - f_{i-1}$$

d_2 : exceso de la frecuencia modal sobre la frecuencia de la clase que sigue inmediatamente a la clase modal

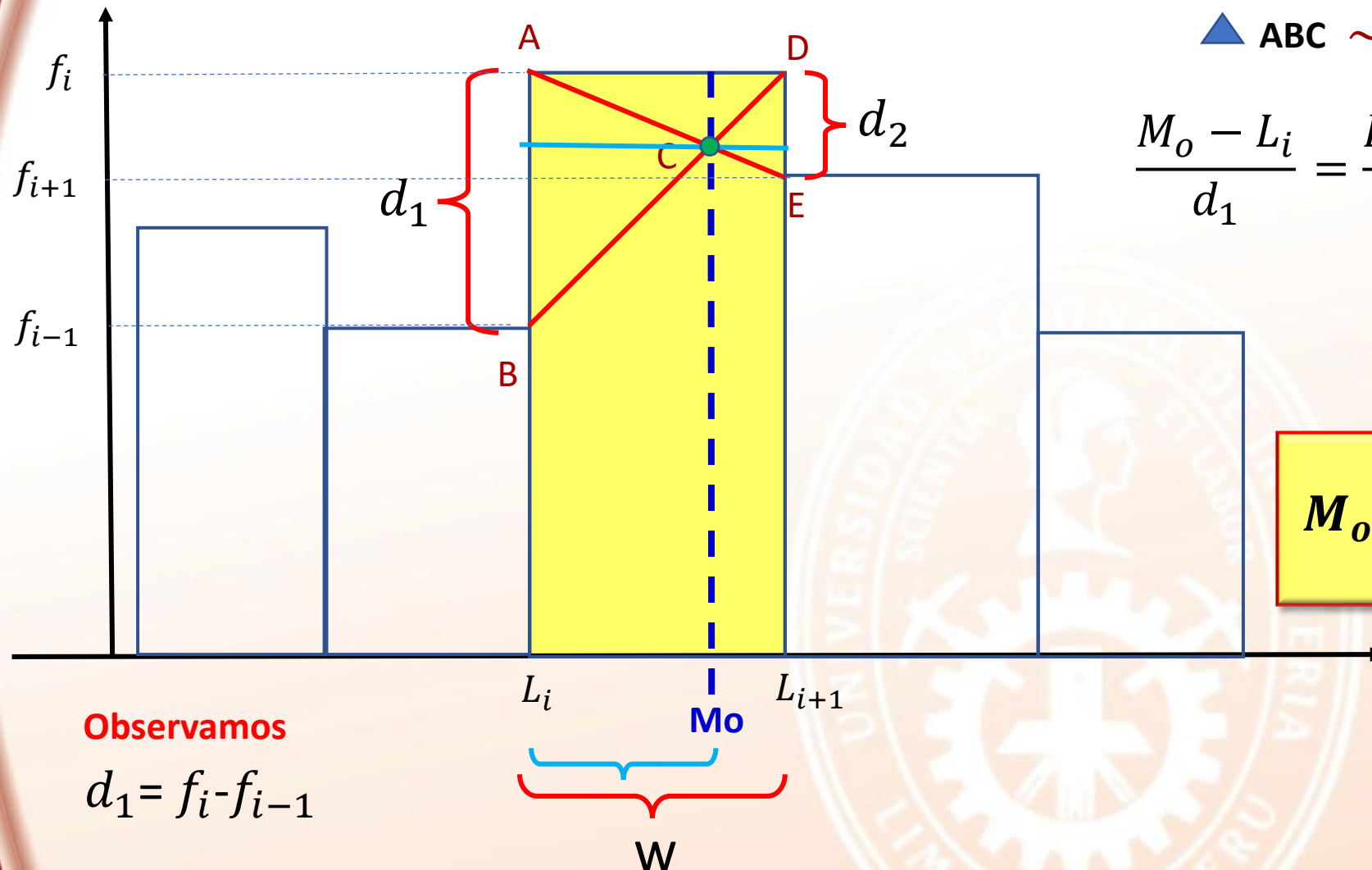
$$d_2 = f_i - f_{i+1}$$

Mo →

L_i	f_i
[; >	f_{i-1}
[L_i ; L_{i+1} >	f_i
	f_{i+1}

Diagram illustrating the calculation of the modal class (Mo) for grouped data. The table shows intervals (L_i) and frequencies (f_i). The modal class is the interval with the highest frequency, $[L_i ; L_{i+1} >$, with frequency f_i . The width of the modal class is W . The excesses d_1 and d_2 are shown as the differences between the modal frequency and the frequencies of the adjacent classes: $d_1 = f_i - f_{i-1}$ and $d_2 = f_i - f_{i+1}$.

DEMOSTRACIÓN Sea el histograma



▲ ABC ~ ▲ CDE

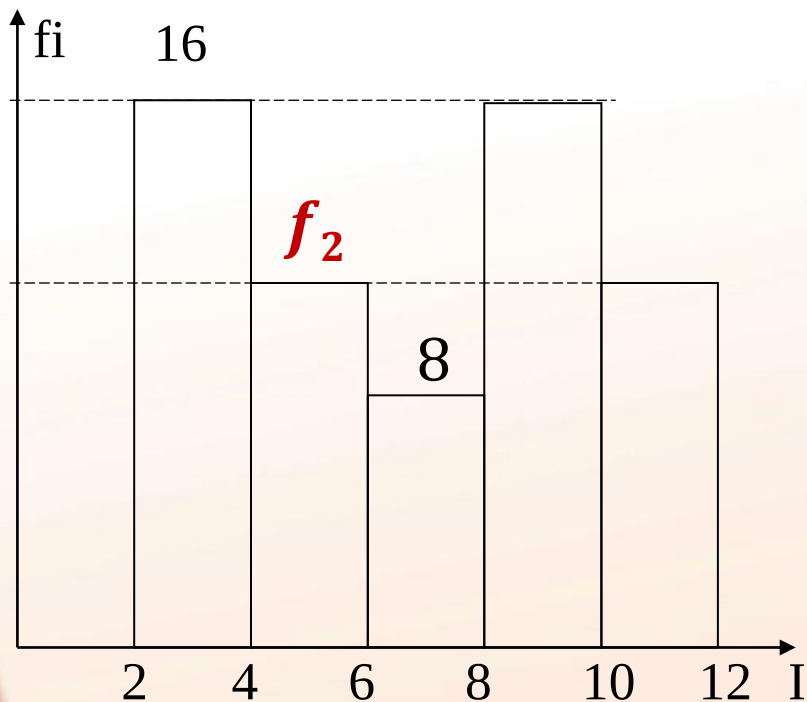
$$\frac{M_o - L_i}{d_1} = \frac{L_{i+1} - M_o}{d_2} = \frac{L_{i+1} - L_i}{d_1 + d_2}$$

$$\frac{M_o - L_i}{d_1} = \frac{W}{d_1 + d_2}$$

$$M_o = L_i + W \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$$

APLICACIÓN 5

En la siguiente distribución de frecuencias simétrica una de las modas es $38/11$. Calcule la otra moda



RESOLUCIÓN

Del dato:

$$Mo_1 = 2 + 2 \left(\frac{16}{16 + (16 - f_2)} \right) = \frac{38}{11}$$

$$f_2 = 10$$

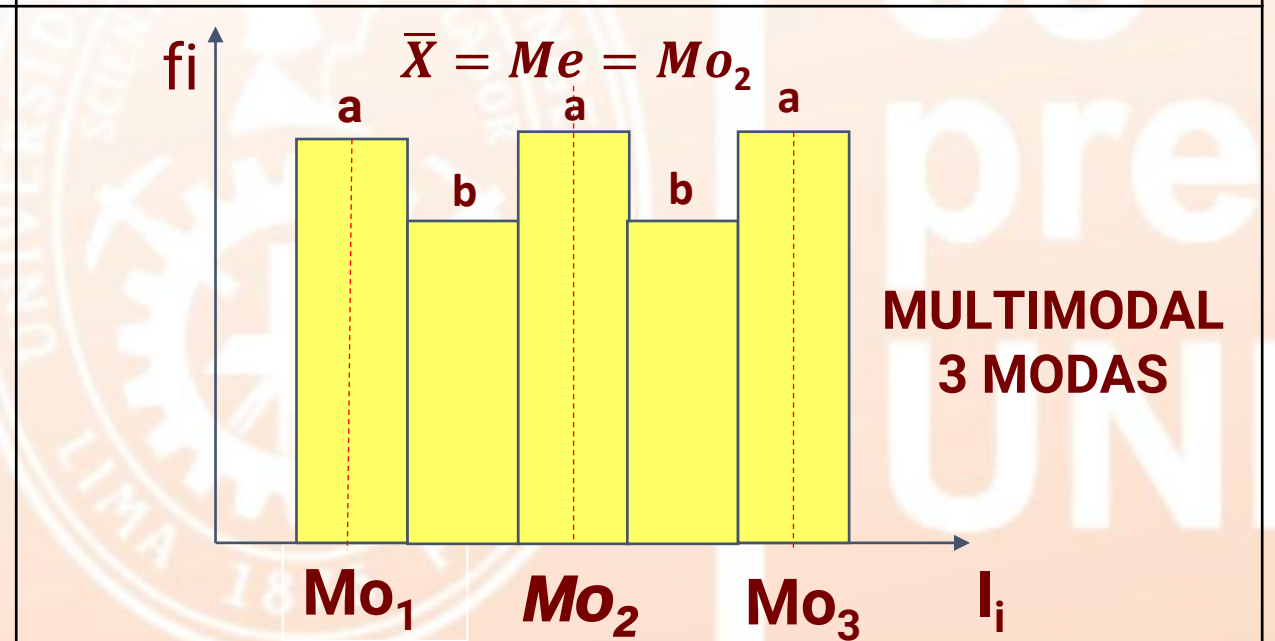
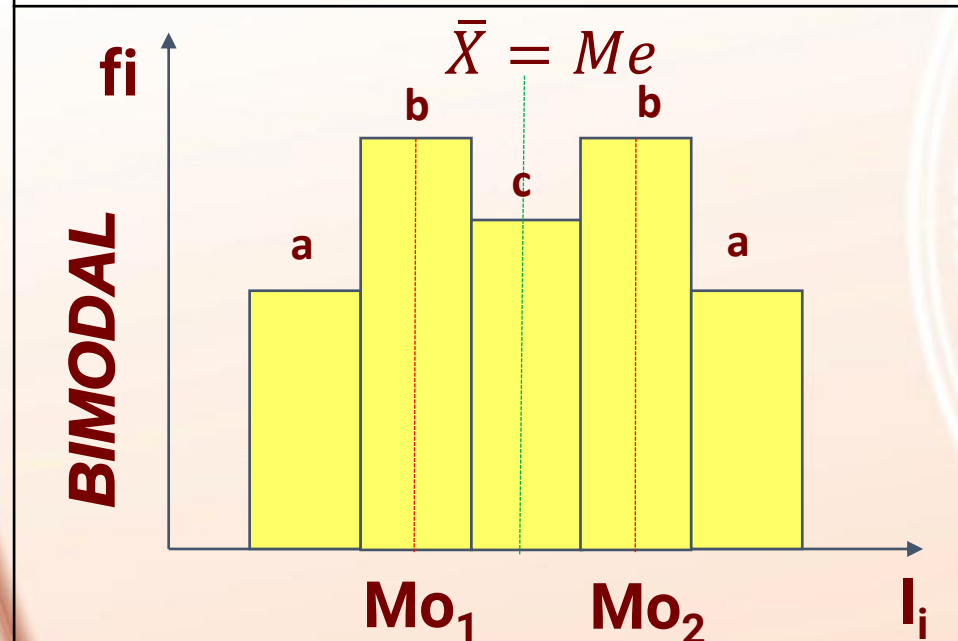
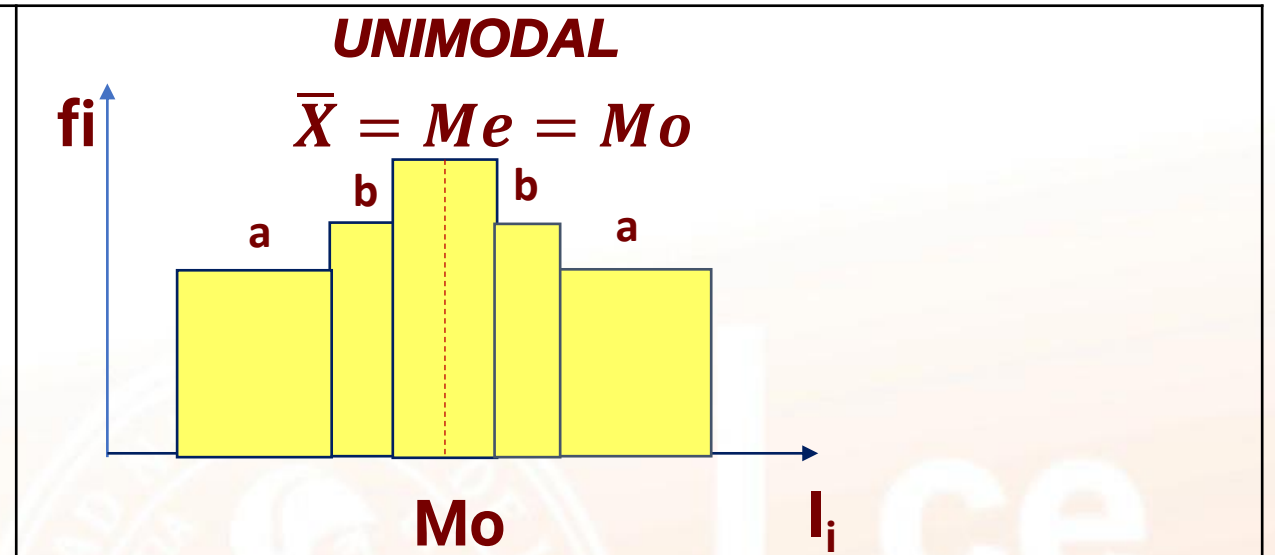
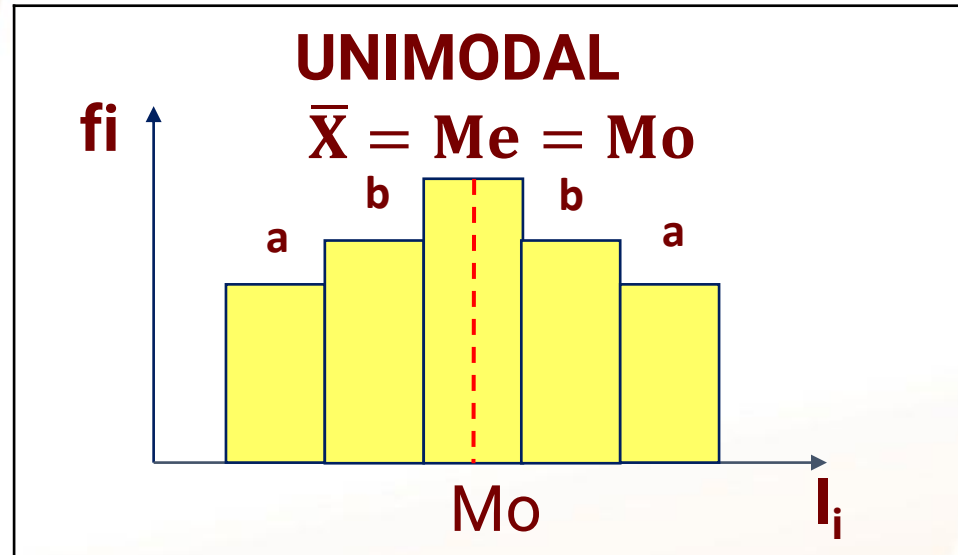
La segunda Moda está en la clase $[8 ; 10 >$

$$\Rightarrow d_1 = 16 - 8 = 8 \quad d_2 = 16 - 10 = 6$$

$$Mo_2 = 8 + 2 \left(\frac{8}{8 + 6} \right)$$

$$Mo_2 = \frac{64}{7}$$

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS SIMÉTRICAS



OBSERVACIÓN

Cuando se observa un dato atípico, ó valor extremo, el mejor representante es la mediana y/o la Moda.

Ejemplo sean los datos: 50, 51, 54, 54, 51, 51, 250

50, 51, 51, 51, 54, 54, 250

Me = 51

(Valores extremos No lo distorsiona)

$\bar{x} = 80,14$

(El valor extremo lo distorsiona)

OTRAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

**PARA DATOS
NO
AGRUPADOS**

MEDIA GEOMÉTRICA

$$MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n}$$

MEDIA ARMÓNICA

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

**PARA DATOS
AGRUPADOS**

$$MG = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_k^{f_k}}$$

$$n = f_1 + f_2 + \cdots + f_k$$

$$MH = \frac{n}{f_1\left(\frac{1}{x_1}\right) + f_2\left(\frac{1}{x_2}\right) + \cdots + f_k\left(\frac{1}{x_k}\right)}$$

$$n = f_1 + f_2 + \cdots + f_k$$

APLICACIÓN 6

La media geométrica de 8 números positivos es 5, de otros 5 números positivos es 6 y de un tercer grupo de 3 números es 8 . Calcule la media geométrica de todos los números.

RESOLUCIÓN

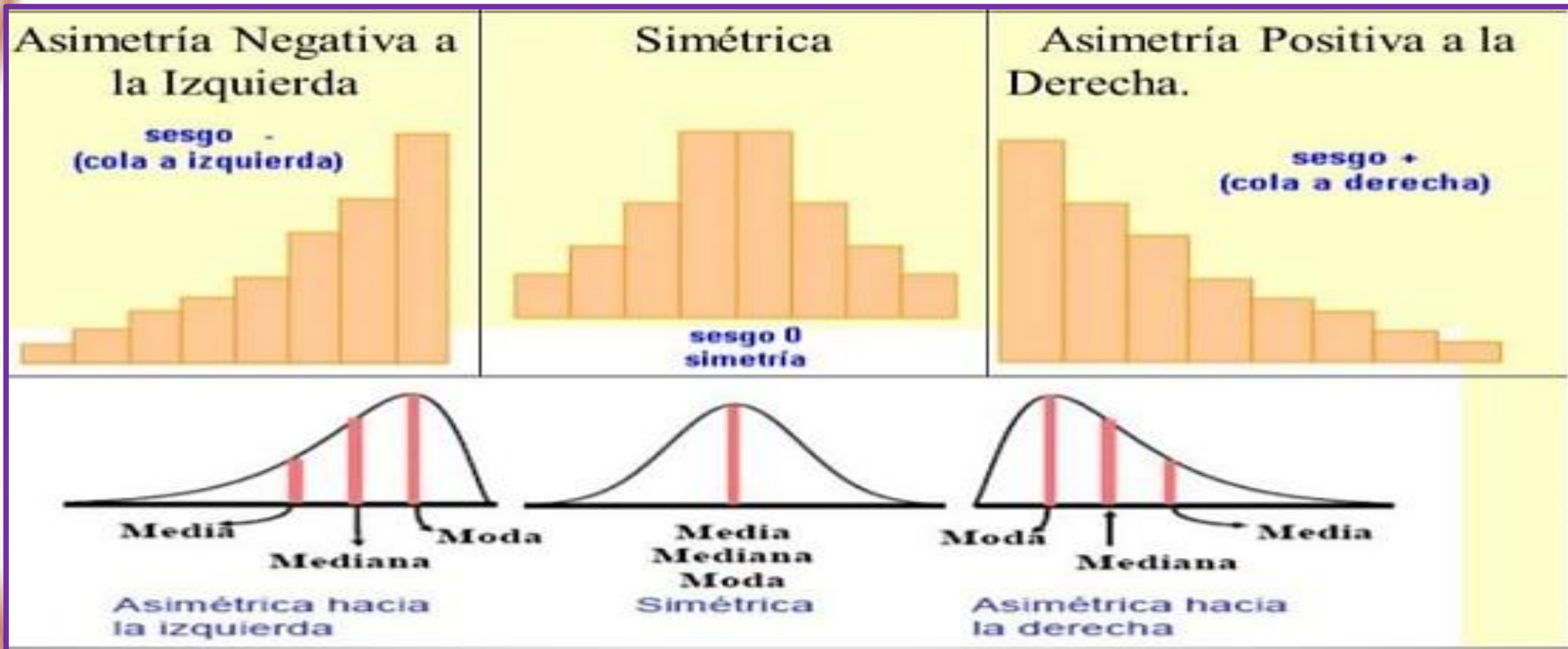
8 #s	5 #s	3 #s
MG = 5	MG = 6	MH = 8

$$MG = \sqrt[16]{5^8 \times 6^5 \times 8^3} \cong 5,78$$

$$MG = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \dots x_k^{f_k}}$$



RELACIÓN DE LAS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN



$$\bar{X} < Me < Mo$$

$$Mo = Me = \bar{X}$$

$$Mo < Me < \bar{X}$$

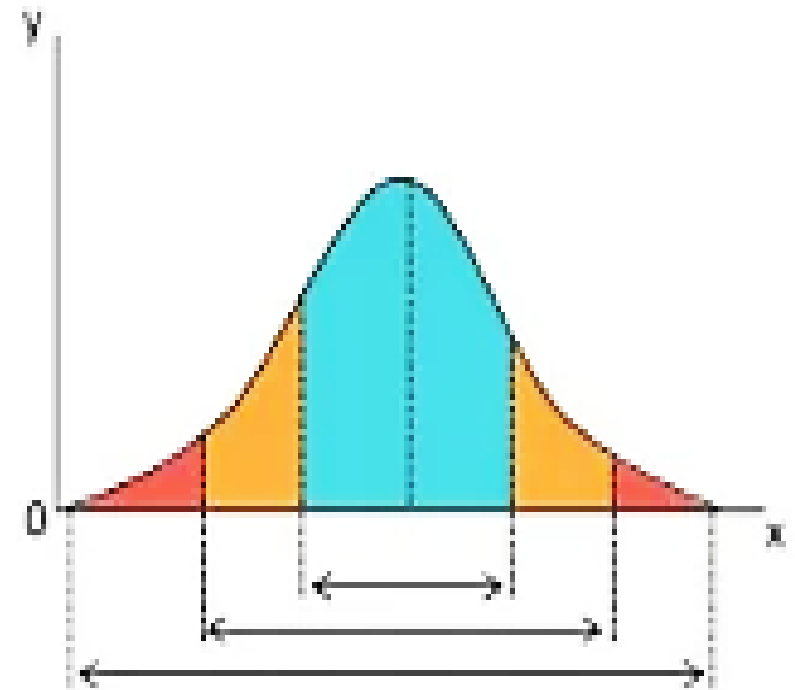
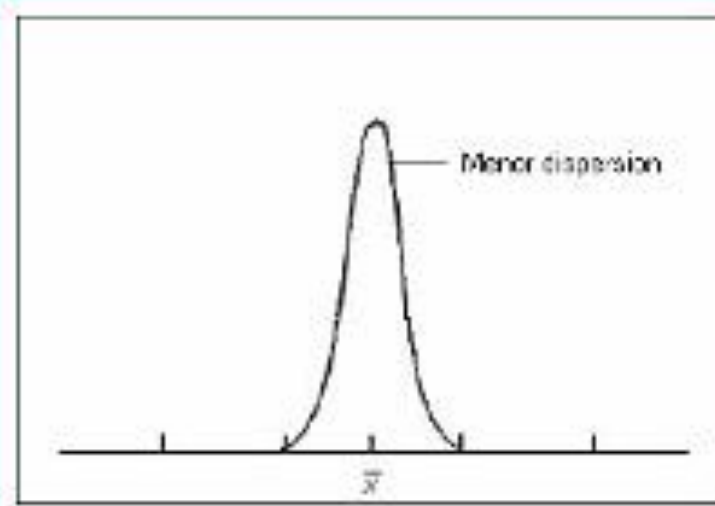
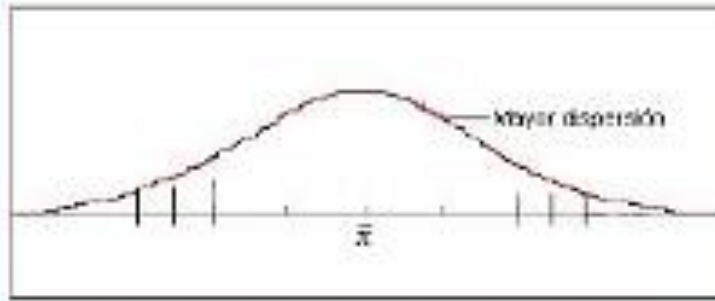
MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión se relacionan con la mayor o menor concentración de datos entorno al valor central, que generalmente es la media aritmética.

Varianza

Desviación estándar

Coefficiente de variación



MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de tendencia central no son suficientes para describir un conjunto de datos de alguna variable estadística.

Las medidas de dispersión o variabilidad son números reales que miden el grado o nivel de separación de los datos con respecto a un valor central, que generalmente es la media aritmética.

La finalidad es también comparar dos o más conjuntos de datos. En este curso veremos la varianza , la desviación estándar y el coeficiente de variación

VARIANZA $[S_{(x)}]^2$

La varianza es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de los datos respecto a su media aritmética.

Sus unidades están elevadas al cuadrado.

Si los datos tienden a acercarse alrededor de la media, la varianza es pequeña, entonces se dice que el conjunto de datos es consistente u homogéneo.

Si los datos tienden a estar lejos de la media ,la varianza es grande. El conjunto de datos es más heterogéneo.

Varianza para datos no agrupados

La varianza de “n” mediciones distintas: $x_1, x_2, \dots, x_n$ de la variable x cuya media aritmética es $\bar{x}$, tiene la siguiente expresión:

$$[S_{(x)}]^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - [\bar{x}]^2$$

Donde: $\bar{x}$: es la media aritmética

Ejemplo: Sean los datos cuantitativos de una variable: 4 ; 6 ; 8 ; 9 y 13

Su media aritmética es: $\bar{X} = \frac{4 + 6 + 8 + 9 + 13}{5} = 8$

Datos	Desviación $d = x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2$
4	-4	16
6	-2	4
8	0	0
9	1	1
13	5	25

$$\sum d = 0 \quad \sum d^2 = 46$$

Varianza:

$$S_{(x)}^2 = \frac{46}{5} = 9,2 u^2$$

APLICACIÓN 7

Calcule la varianza de todos los números de dos cifras y que sean múltiplos de 7.

RESOLUCIÓN

$$\frac{98 - 14}{7} + 1 = 13 \text{ \#s}$$

Los números de dos cifras 7 : **14, 21, 28,, 98**

$$s^2 = \frac{\sum Xi^2}{n} - \bar{X}^2$$

$$\bar{X} = \frac{14 + 98}{2} = 56$$

$$s^2 = \frac{14^2 + 21^2 + 28^2 + \dots + 98^2}{13} - 56^2$$

$$s^2 = \frac{7^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 14^2 - 1^2)}{13} - 56^2$$

$$s^2 = \frac{49 \left[\frac{14(15)(29)}{6} - 1 \right]}{13} - 56^2 = \frac{49[1\ 014]}{13} - 3\ 136 = 686$$



Varianza para datos agrupados

Si $x_1, x_2, \dots, x_k$, son las marcas de clase de k intervalos distribuidos de un grupo de datos de la variable x , además $f_1, f_2, \dots, f_k$ son las frecuencias absolutas respectivas, la varianza está dado por:

$$[S(x)]^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n}$$

$$[S(x)]^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i)^2 f_i}{n} - [\bar{x}]^2$$

$$[S(x)]^2 = \sum_{i=1}^k (x_i)^2 h_i - [\bar{x}]^2$$

DESVIACIÓN ESTANDAR O TÍPICA ($\sqrt{S^2}$)

Describe lo mismo que la varianza y la ventaja es que tiene las mismas unidades que los datos. Siempre es positivo.

$$S = \sqrt{S^2}$$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN (C. V)

Expresa la desviación estándar como porcentaje de la media aritmética, mostrando una interpretación *relativa* del grado de variabilidad.

No posee unidades. Sirve para comparar grado de homogeneidad entre dos grupos de datos, siendo más homogéneo el de menor coeficiente.

$$CV = \frac{S}{\bar{X}}$$

APLICACIÓN 8

Se confecciono tablas respecto a las estaturas y pesos de 50 alumnos del CEPRE – UNI. ¿Cuál de las características observadas es mas consistente.

RESOLUCIÓN

X_i	f_i	$X_i \cdot f_i$	$(X_i)^2 \cdot f_i$
1,30	4	5,2	6,76
1,50	24	36	54
1,70	16	27,2	46,24
1,90	6	11,4	21,66

$$n = 50 \quad \Sigma = 79,8 \quad \Sigma = 128,66$$

$$\bar{X} = \frac{79,8}{50} = 1,596 \rightarrow S^2 = \frac{128,66}{50} - 1,596^2$$

$$\rightarrow S^2 = 0,025984 \rightarrow S = \sqrt{0,025984} = 0,16$$

$$CV_{(talla)} = \frac{0,16}{1,596} = \mathbf{10,10\%}$$

Estaturas (m)	f_i	Pesos (kg)	h_i
[1,20 ; 1,40 >		[35 ; 45 >	0,1
[1,40 ; 1,60 >	24	[45 ; 55 >	0,3
[1,60 ; 1,80 >	16	[55 ; 65 >	0,5
[1,80 ; 2,00 >	6	[65 ; 75 >	

X_i	h_i	$X_i \cdot h_i$	$(X_i)^2 \cdot h_i$
40	0,1	4	160
50	0,3	15	750
60	0,5	30	1800
70	0,1	7	490

$$\Sigma = 56 \quad \Sigma = 3\,200$$

$$\bar{X} = 56 \rightarrow S^2 = 3\,200 - 56^2 = 64$$

$$S = \sqrt{64} = 8 \quad CV_{(peso)} = \frac{8}{56} = \mathbf{14,28\%}$$

La estatura es mas consistente que el peso

PROPIEDADES

Sean la variable cuantitativa X , y otra variable $Y = aX + b$; es decir cada uno de los n datos cuantitativos x_i es transformado en $y_i = ax_i + b$ (donde a y b son constantes reales)

Siendo $M(X)$ la media de la variable X , además $Var(X)$ varianza de X , se cumple:

$$\diamond M(Y) = M(aX + b) = aM(X) + b$$

$$\diamond Var(Y) = Var(ax + b) = a^2 \cdot Var(X)$$

Corolario: Si: $Y = X + b$, entonces $Var(Y) = Var(X)$

Corolario: Si $Y = aX + b$, entonces $S_{(Y)} = |a| \cdot S_{(X)}$

APLICACIÓN 9

El sueldo promedio de los docentes de una Institución Educativa es 3600 soles, siendo su varianza 32,4 soles². Si la Institución Educativa decide incrementar en 20% el sueldo de sus docentes y además compensar con 200 soles los gastos de movilidad. ¿Calcule la nueva media y varianza de los nuevos sueldos?

Resolución: $M(S_i) = 3\,600$; $Var(S_i) = 32,4$

El sueldo de cada empleado varia de la siguiente manera:

$$S_f = 1,20 \cdot S_i + 200$$

$$M(S_f) = 1,20 \cdot \overbrace{M(S_i)}^{3\,600} + 200 = 4\,520 \text{ soles}$$

$$Var(S_f) = (1,20)^2 \cdot \underbrace{Var(S_i)}_{32,4} = 46,656 \text{ soles}^2$$

EJERCICIOS RESUELTOS

CICLO PRE 2024 - 1



ce
pre
UNI

EJRCICIO N° 211

Indique verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

- I. $V(2n+1)+V(2n+2)+\dots+V(2n+k)=V(kn) \rightarrow k=4$, donde $V(x)$ es varianza.
- II. La mediana siempre pertenece al conjunto de datos.
- III. Si la distribución es simétrica entonces la media, mediana y moda coinciden.
- A) VVV B) VFV C) VVF D) FVF E) VFF

Resolución:

- I) $V_{(2n)} \times K = K^2 \times V_{(n)} \rightarrow V_{(n)} \times 4K = K^2 \times V_{(n)} \rightarrow K = 4$, (V)
- II) La mediana, no siempre es un dato (F)
- III) Solo en el caso que sea unimodal (F)

CLAVE E

EJERCICIO N° 212

La siguiente tabla muestra la distribución con ancho de clase común. Calcule frecuencia absoluta del segundo intervalo si la mediana es 21.

A) 5

B) 6

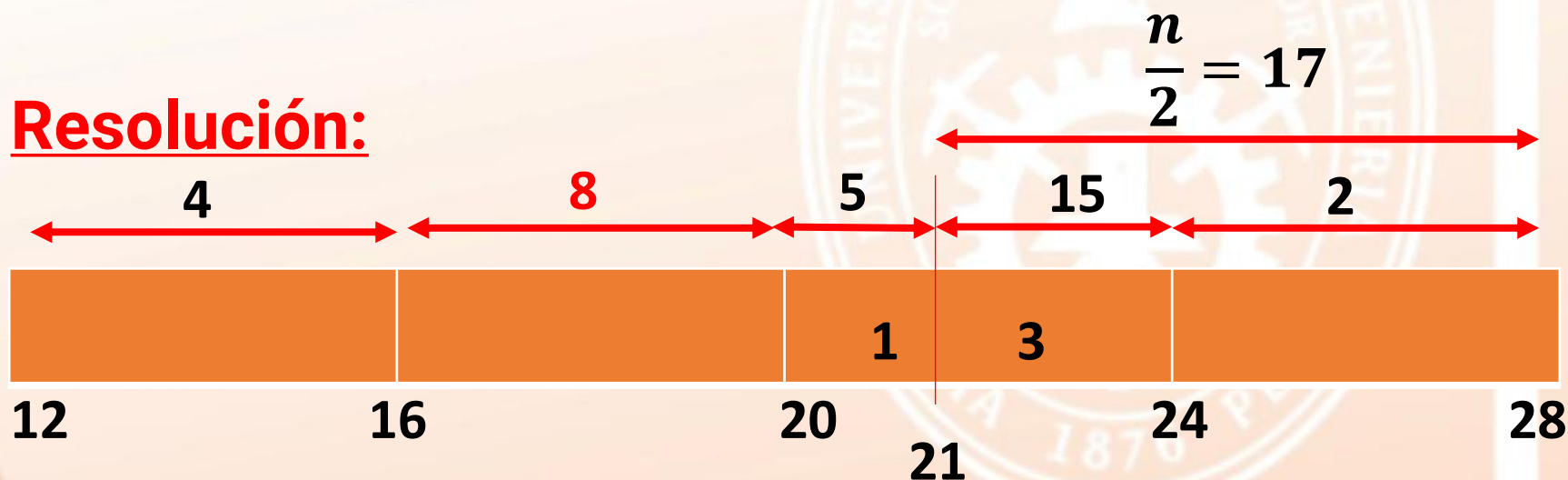
C) 7

D) 8

E) 9

I_i	f_i	F_i	H_i
$[- \]$	4		
$[16; \]$			
$[- \]$		32	
$[24;]$	2		1

Resolución:



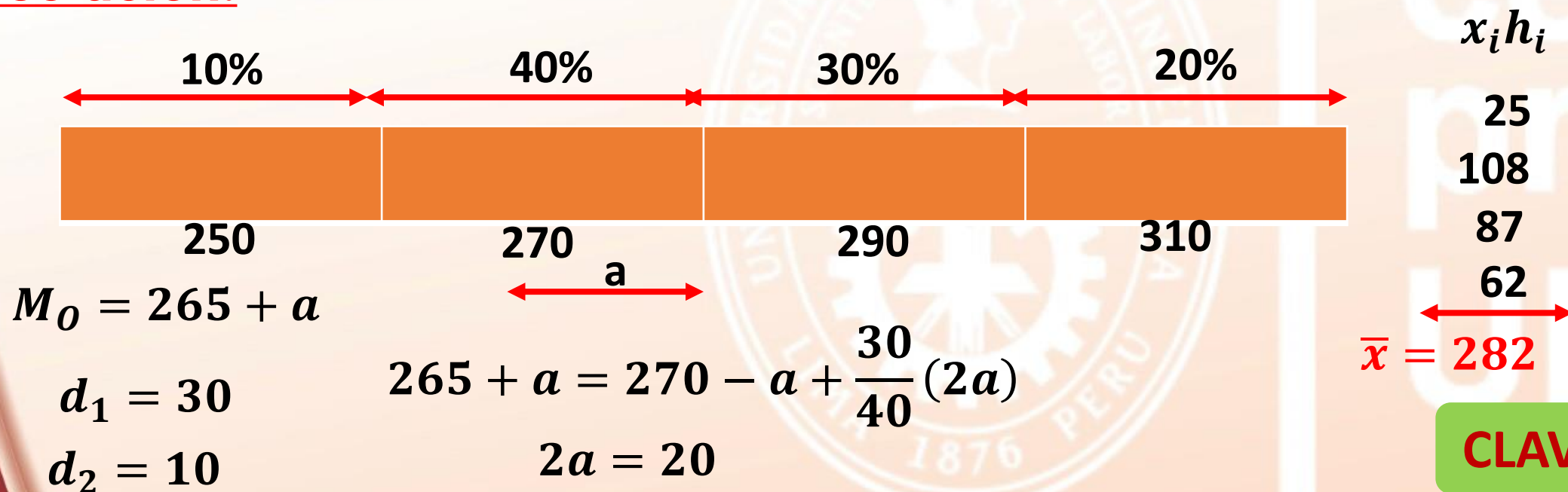
CLAVE D

EJERCICIO N° 213

Se tiene una tabla de frecuencias con 4 intervalos cuyo ancho de clase es común y se sabe que: El 10% de los datos están en el primer intervalo. Hasta el segundo intervalo se presentan el 50% de los datos. En el tercer intervalo hay un 30% de los datos. Calcule la media, si la mediana excede a la moda en 5 y la marca de clase del segundo intervalo es 270.

- A) 270 B) 265 C) 282 D) 292 E) 302

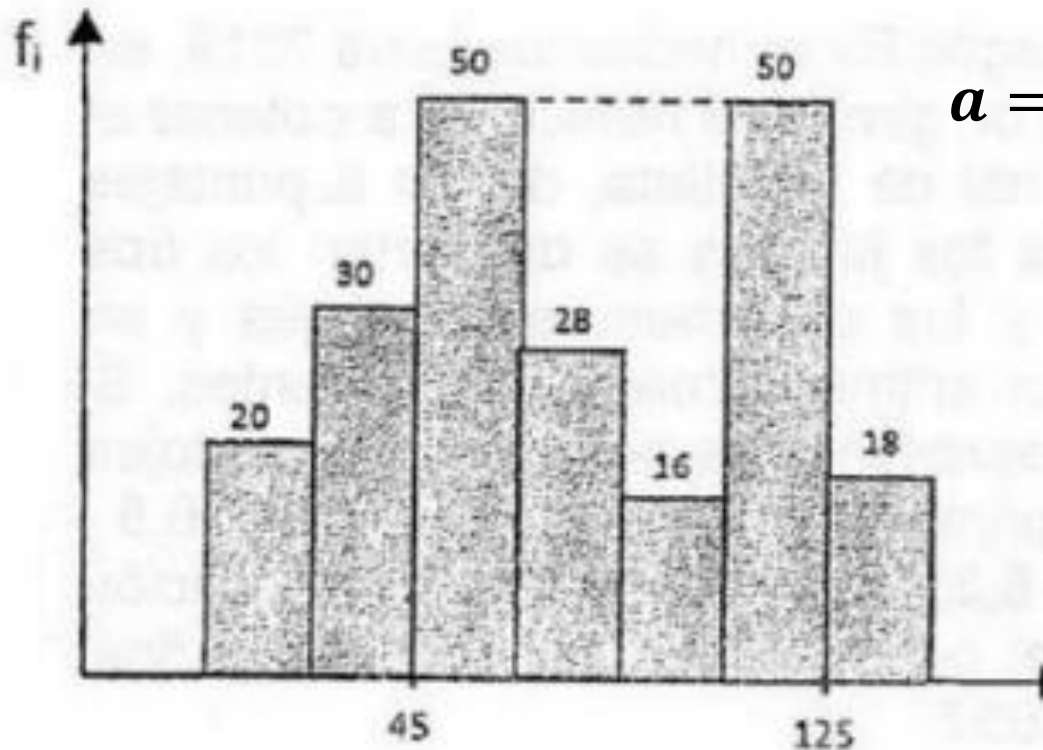
Resolución:



EJERCICIO N° 214

En el siguiente histograma de ancho de clase común, calcule la suma aproximada de las modas más la mediana.

- A) 120,8 B) 136,2 C) 168,4
D) 239,1 E) 249,1



Resolución:

$$n = 212$$

$$\frac{n}{2} = 106$$



$$4W = 125 - 45 = 80$$

$$W = 20,$$

$$a = \frac{6}{28} (20) = \frac{30}{7}$$

$$Me = 65 + \frac{30}{7} = 69,28$$

$$Mo1 = 45 + \frac{20}{20 + 22} \times 20 = 54,52$$

$$Mo2 = 105 + \frac{34}{34 + 32} \times 20 = 115,30$$

$$suma = 239,1$$

CLAVE D

EJERCICIO N° 215

Cinco números enteros positivos tienen media 9,4 mediana 8 y moda 5 además uno de ellos toma un máximo valor. Determine la desviación estándar de dichos números.

A) 5,53**B) 6,08****C) 6,95****D) 7,02****E) 7,71****Resolución:**

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 5 \times 9,4 = 47$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i)^2 = 595$$

$$\begin{array}{ccccc} \underline{5} & \underline{5} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{20} \end{array}$$

$$Var(x) = \frac{595}{5} - (9,4)^2 = 30,64$$

$$S(x) = \sqrt{30,64} = 5,53$$

CLAVE A

PROBLEMA 216

En la siguiente ojiva, calcule el valor aproximado de la moda.

- A) 31,5 B) 31,0 C) 30,5
D) 30,0 E) 29,5

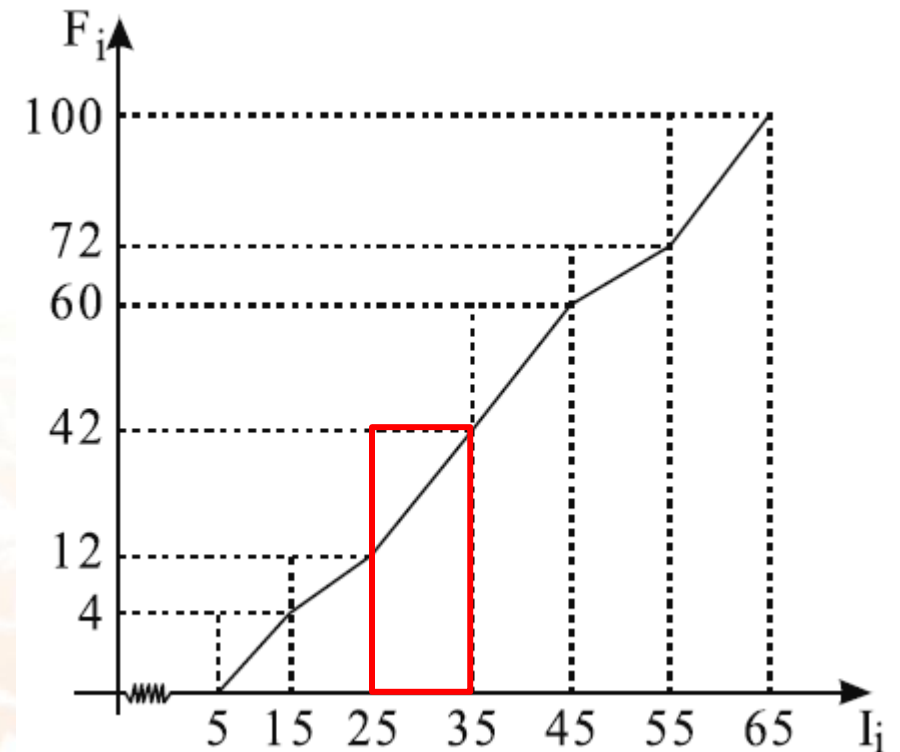
Resolución

Aplicando:

$$M_o = L_i + W \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$$

Reemplazando: $M_o = 25 + 10 \left(\frac{22}{22 + 12} \right)$

$\therefore M_o = 31,5$



EJERCICIO N° 217

En una distribución simétrica con 7 intervalos con igual ancho de clase, se conocen los siguientes datos:

$$w = 10; f_1 = 8; f_3 + f_5 = 62; x_3 + f_4 = 211; H_3 = 0,21 \text{ y } H_6 = 0,96$$

Calcule la media de dicha distribución.

A) 96

B) 98

C) 100

D) 102

E) 105

Resolución:



$$4\%n = 8$$

$$n = 200$$

$$f_4 = 116 \rightarrow x_3 = 95$$

$$M_e = x_4 = x_3 + W = 95 + 10 = 105$$

CLAVE E

PROBLEMA 218

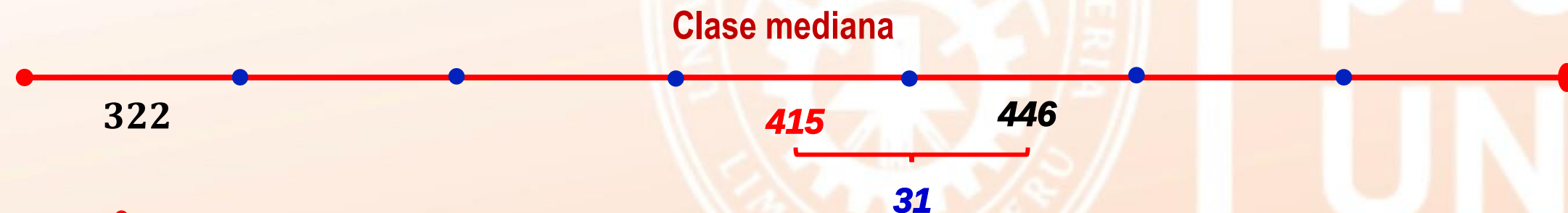
Al clasificar los sueldos de los trabajadores de una empresa se obtuvo una distribución simétrica de $(2n + 1)$ intervalos y ancho de clase común. Si se cumple que: $x_{n-2} = 322$; $x_{n+2} = 446$. Calcule el sueldo promedio más la mediana de dichos sueldos

- A) 640 B) 720 C) 780 D) 830 E) 850

Resolución

Se deduce que se trata de 7 intervalos de igual ancho de clase

Entonces: $4W = 446 - 322 \Rightarrow W = 31$



$\therefore \bar{x} + Me = 830$

EJERCICIO N° 219

La siguiente tabla muestra la distribución de 50 datos, con ancho de clase común. Calcule la moda si $\bar{x} = 46,8$.

- A) 45,7 B) 47,5 C) 48,75
D) 47,7 E) 47,75

Resolución

$$40 + 2,5A = 65$$

$$A = 10$$

$$H_2 = \frac{21}{50} = 0,42$$

$$\rightarrow h_2 = 0,24$$

$$a + b = 0,42$$

$$\Sigma x_i \cdot h_i = 46,8$$

$$24,6 + 50a + 70b = 46,8$$

I_i	x_i	f_i	h_i	F_i
$[- \]$			0,18	
$[- \]$	40			21
$[- \]$				
$[- \]$			0,16	
$[65 ;]$				

I_i	x_i	h_i	$x_i \cdot h_i$
$[25; 35]$	30	0,18	5,4
$[35; 45]$	40	0,24	9,6
$[45; 55]$	50	a	50a
$[55; 65]$	60	0,16	9,6
$[65; 70]$	70	b	70b

$$\left. \begin{array}{l} 5a + 7b = 2,22 \\ 5a + 5b = 2,1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 0,36 \\ b = 0,06 \end{array}$$

$$Mo = 45 + \frac{0,12}{0,12 + 0,2} \cdot (10)$$

$$Mo = 48,75$$

Rpta. C

EJERCICIO N° 220

A un grupo de 200 estudiantes se les encuestó acerca del número de libros que leen al año obteniéndose una muestra cuyo alcance es $[10; 35]$. Al clasificarla en 5 intervalos con ancho de clase común, se obtiene que la moda es 23 y además:

Calcule la mediana.

$$f_4 = 2f_2 ; \quad F_2 = 30 \quad \text{y} \quad \frac{f_3}{f_2} = \frac{f_5}{f_1}$$

Resolución

A) 23,50 B) 23,75 C) 24,10 D) 24,25 E) 25

$$f_1 = a; \quad f_2 = b; \quad f_4 = 2b$$

$$f_5 = a \cdot k; \quad f_3 = b \cdot k$$

$$A = \frac{35 - 10}{5} = 5$$

$$a + 3b + k(a + b) = 200$$

$$a + b = 30$$

I_i	f_i
$[10; 15)$	a
$[15; 20)$	b
$[20; 25)$	kb
$[25; 30)$	$2b$
$[30; 35]$	ka

$$20 + \frac{kb - b}{kb - b + kb - 2b} \cdot 5 = 23$$

$$\frac{k-1}{2k-3} = \frac{3}{5} \rightarrow k = 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 25 \end{array} \right.$$

$$Me = 20 + \frac{100 - 30}{100} \cdot 5 = 23,5$$

Rpta. A

EJERCICIO N° 221

La tabla muestra la distribución de los sueldos de un grupo de empleados en una empresa, con ancho de clase común. Calcule $\bar{x} + Me$.

A) 3128 B) 3129 C) 3130 D) 3131 E) 3132

Resolución

$$980 + 4A = 2100$$

$$A = 280$$

$$0,65 + 2x + 0,15 = 1$$

$$x = 0,1$$

$$\bar{x} = \sum x_i \cdot h_i$$

$$\bar{x} = 1568$$

I_i	x_i	h_i	H_i
$[\quad ; \quad)$	980		x
$[\quad ; \quad)$		$2x$	
$[\quad ; \quad)$			0,65
$[\quad ; \quad)$		$2x$	
$[\quad ; \quad]$	2100	0,15	

I_i	x_i	h_i	$x_i h_i$
$[840 ; 1120)$	980	0,1	98
$[1120 ; 1400)$	1260	0,2	252
$[1400 ; 1680)$	1540	0,35	539
$[1680 ; 1960)$	1820	0,2	364
$[1960 ; 2240]$	2100	0,15	315

$$Me = 1400 + \frac{0,5 - 0,3}{0,35} \cdot 280$$

$$Me = 1560$$

$$\bar{x} + Me = 3128$$

Rpta. A

EJERCICIO N° 222

En una distribución simétrica con 5 intervalos con igual ancho de clase, se conocen los siguientes datos:

$$n = 150; f_5 = 10; f_3 = 40; x_{\min} = 48 \text{ y } x_{\max} = 98$$

Calcule la mayor moda de la distribución.

Resolución

A) 79,25 B) 80,50 C) 81,25 D) 82,50 E) 83,50

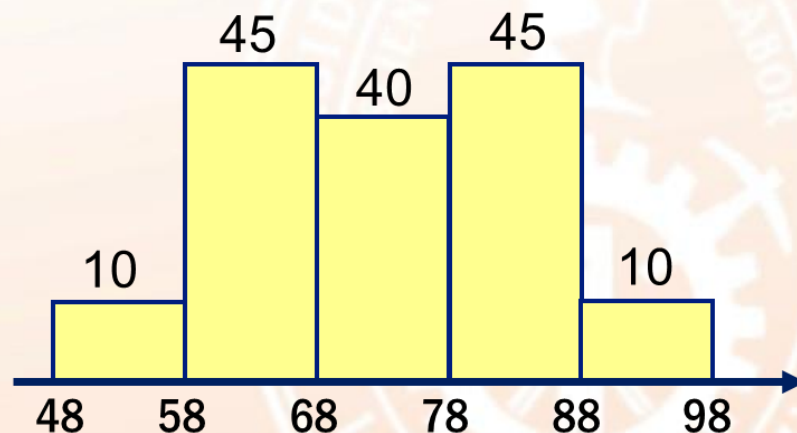
$$f_5 = 10 = f_1$$

$$f_2 = a = f_4$$

$$20 + 2a + 40 = 150$$

$$a = 45$$

$$A = \frac{98 - 48}{5} = 10$$



$$Mo_2 = 78 + \frac{5}{5 + 35} \cdot 10$$

$$Mo_2 = 79,25$$

Rpta. A

EJERCICIO N° 223

La siguiente tabla muestra la distribución de un conjunto de datos, con ancho de clase común. Calcule la diferencia de la mediana y la moda.

- A) 17,6 B) 20 C) 21
D) 22 E) 23

Resolución:

Completando la tabla:

❖ **Mediana:**

$$Me = 102 + 24 \left(\frac{100 - 80}{30} \right)$$

$$Me = 118$$

I_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[30 - 54)	16	16	0,08	
[54 - 78)	64	80		0,4
[78 - 102)	0	80		
[102 - 126)	30	110		
[126 - 150]	90	200		

❖ **Moda:**

$$Mo = 126 + 24 \left(\frac{60}{60 + 90} \right)$$

$$Mo = 135,6$$

$$\therefore Mo - Me = 17,6$$

EJERCICIO N° 224

En una distribución de frecuencias, se multiplican los valores originales de la variable por 4 y se obtiene una media de 72,8. Además, si se aumenta 5 unidades a los valores originales de la variable se obtiene que la media de los cuadrados de los nuevos valores es 576,68. Calcule la desviación estándar de los datos originales.

A) 5,4

B) 5,8

C) 6

D) 6,2

E) 6,9

Resolución:

$$\bar{x}_{(4x_i)} = 4\bar{x}_{(x_i)} = 72,8 \quad \rightarrow \quad \bar{x}_{(x_i)} = 18,2 \quad \rightarrow \quad \bar{x}_{(x_i+5)} = \bar{x}_{(x_i)} + 5$$

$$Var_{(x_i+5)} = Var_{(x_i)}$$

$$\frac{(x_1 + 5)^2 + (x_2 + 5)^2 + \dots + (x_n + 5)^2}{n} - (23,5)^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (18,2)^2$$

$$576,68 - (23,5)^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (18,2)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} = 369,68$$

Luego: $Var_{(x_i)} = 369,68 - (18,2)^2 = 38,44$ $\therefore \sigma = \sqrt{38,44} = 6,2$

EJERCICIO N° 225

Si la frecuencia relativa del intervalo mediano de cierto muestreo es 25% y las frecuencias absolutas de los intervalos no medianos suman 375. Si la frecuencia relativa del intervalo modal es 30%, determine la suma de las frecuencias absolutas de los intervalos no modales.

- A) 320 B) 330 C) 340 D) 350 E) 360

Resolución:

*Si la frecuencia relativa del intervalo mediano es **25%***



Frecuencia relativa de los no medianos:

$$75\% \quad n = 375$$

$$n = 500 \quad (\text{total de datos})$$

*Si la frecuencia relativa del intervalo modal es **30%***



Frecuencia relativa de los no medianos:

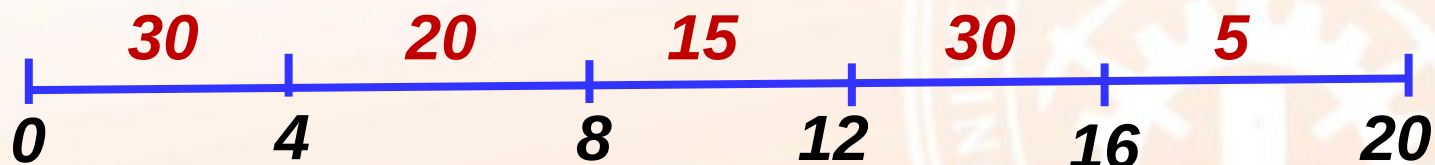
$$70\% (500) = 350$$

EJERCICIO N° 226

La siguiente grafica es una ojiva, calcule el máximo valor de la moda más la mediana.

- A) 17,5 B) 18,5 C) 19,5
D) 20,5 **E) 21,5**

Resolución:



$$Me = 8$$

$$Mo = 12 + 4 \left(\frac{15}{15 + 25} \right) = 13,5 \rightarrow Me + Mo = 21,5$$

EJERCICIO N° 227

Dados los siguientes datos: 6; 8; 13; 4; 12; 12; 8; 7; 4; 13; 15; 7; 8. Calcule la suma de la media, mediana y moda.

A)21**B)22****C)23****D)24****B)25****Resolución:**

4, 4, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 12, 12, 13, 13, 15

$$Mo = 8$$

$$Me = 8$$

$$\bar{x} = \frac{4 \times 2 + 6 + 7 \times 2 + 8 \times 3 + 12 \times 2 + 13 \times 2 + 15}{13} = 9$$

$$\rightarrow Mo + Me + \bar{x} = 25$$

EJERCICIO N° 228

Se muestra el polígono de frecuencia que describe los pesos en kilogramos de los pacientes en cierta clínica. Calcule la moda.

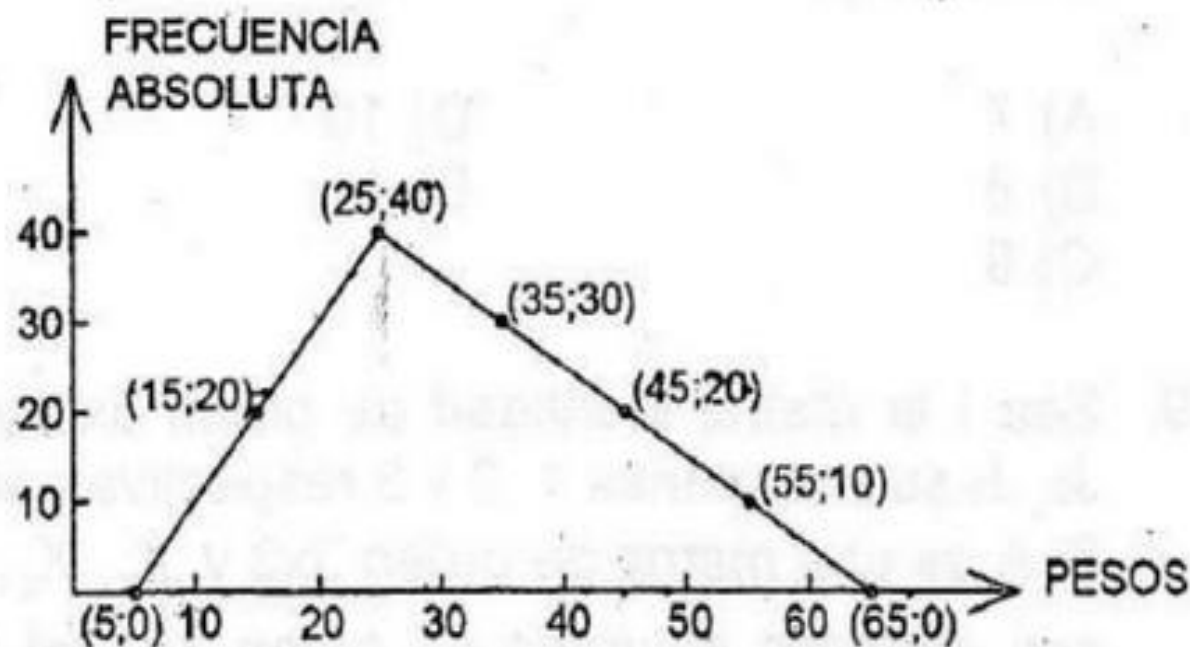
A) 79/3

B) 80/3

C) 82/3

D) 83/3

E) 85/3



Resolución:

$$M_o = 20 + 10 \left(\frac{20}{20 + 10} \right) = \frac{80}{3}$$

EJERCICIO N° 229

La siguiente tabla muestra la distribución de un conjunto de datos, con ancho de clase común. Calcule el coeficiente de variación.

A) 0,33 B) 5,37 C) 6,04 D) 6,85 E) 7,04

I_i	f_i	h_i	H_i
[- >	50		
[30 - >	20		0,35
[- >	40	0,2	0,55
[- >	30	0,15	0,7
[60;]	60		

Resolución:

$$\frac{70}{n} = 0,35 \rightarrow n = 200$$

$$\bar{x} = 46,5$$

$$\frac{\sum x_i^2}{n} = 2405$$

$$S^2 = 2405 - 46,5^2 = 242,75$$

$$CV = \frac{\sqrt{242,75}}{46,5} = 0,335$$

EJERCICIO N° 230

Las notas obtenidas por un alumno de CEPREUNI en las 6 primeras prácticas fueron ordenados en forma no creciente como $p, p, 17, 3m, 2m, n$. Si los datos tienen respectivamente media; mediana y moda valores pares consecutivos crecientes, calcule m.n.p donde m, n y p son enteros positivos.

A) 280

B) 360

C) 480

D) 540

E) 630

Resolución:

Tenemos: $p, p, 17, 3m, 2m, n$

Ordenada en forma no creciente

$$\text{Media} = \frac{2p + 17 + 5m + n}{6}$$

Debes ser pares consecutivos

$$\text{Mediana} = \frac{17 + 3m}{2}$$

Moda = p

$$\bar{X} < Me < Mo$$

$$17 > 3m \rightarrow$$

$$5, \dots > m$$



5



$$Me = 16$$

3



$$Mo = 18 = p$$

1



$$\rightarrow \bar{X} = \frac{2 \cdot 18 + 17 + 5 \cdot 5 + n}{6} = 14 \rightarrow n = 6$$

$\therefore$

$$5 \cdot 6 \cdot 18 = 540$$

EJERCICIO N° 231

Se tienen n datos $a_1, a_2, \dots, a_n$, de varianza S^2 y desviación estándar S , indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si a todos los datos se les añade una misma cantidad k distinto de cero, entonces la varianza no varía.

II. Si a todos los datos se les multiplica por una misma cantidad k distinto de cero, entonces la desviación estándar es $S \cdot k$.

III. Si a todos los datos se les divide una misma cantidad k distinto de cero, entonces la varianza será $S^2 \cdot k^{-2}$.

A) VFV 

B) FVF

C) VVV

D) FVV

E) VVF

Resolución:

I) Se suma una constante $k \neq 0$: $a_1 + k; a_2 + k; \dots; a_3 + k$

$$Y = X + k$$

$$S^2(Y) = S^2(X + k) \rightarrow S^2(Y) = S^2(X) \quad (V)$$

II) Se multiplica una constante $k \neq 0$: $a_1 \cdot k; a_2 \cdot k; \dots; a_3 \cdot k$

$$Y = k \cdot X$$

$$S(Y) = S(k \cdot X) \rightarrow S(Y) = |k|S(X) \quad (F)$$

III) Se divide una constante $k \neq 0$: $a_1/k; a_2/k; \dots; a_3/k$

$$Y = X/k$$

$$S^2(Y) = S^2(X/k) \rightarrow S^2(Y) = S^2(X)/k^2 \quad (V)$$

$$S^2(Y) = k^{-2} \cdot S^2(X)$$

EJERCICIO N° 232

La siguiente tabla muestra la distribución de un conjunto de datos, con ancho de clase común. Calcule la diferencia de la mediana y la moda.

- A) 57,77 B) 68,95 C) 69,70 D) 70,08 E) 71,81

Resolución:

I_i	X_i	F_i	h_i	H_i
[150-200 >	175	a=200	0,20	0,20
[200 - 250 >	225	46	0,26	0,46
[250 - 300 >	275	56	0,1	0,56
[300 - 350 >	325	86	0,3	0,86
[350 - 400]	375	5a	0,14	1

Clase
mediana

Clase modal

$$L_2 + L_3 = 450$$

$$L_4 + L_5 = 650$$

$$4w = 200 \rightarrow w = 50$$

$$H_2 = \frac{F_2}{n} \quad 0,46 = \frac{46}{n} \quad n = 100$$

Cálculo de la moda:

$$Mo = 300 + 50 \left(\frac{0,3 - 0,1}{0,3 - 0,1 + 0,3 - 0,14} \right) = 327,78$$

Cálculo de la mediana:

$$Me = 270 + 50 \left(\frac{0,5 - 0,46}{0,10} \right) = 270 \therefore Mo - Me = 57,78$$

EJERCICIO N° 233

El siguiente polígono de frecuencias muestra la distribución de las edades de un grupo de personas en años. Si todos los intervalos de clase de la gráfica son de igual amplitud, calcule la moda.

A)45,65

B)46,55

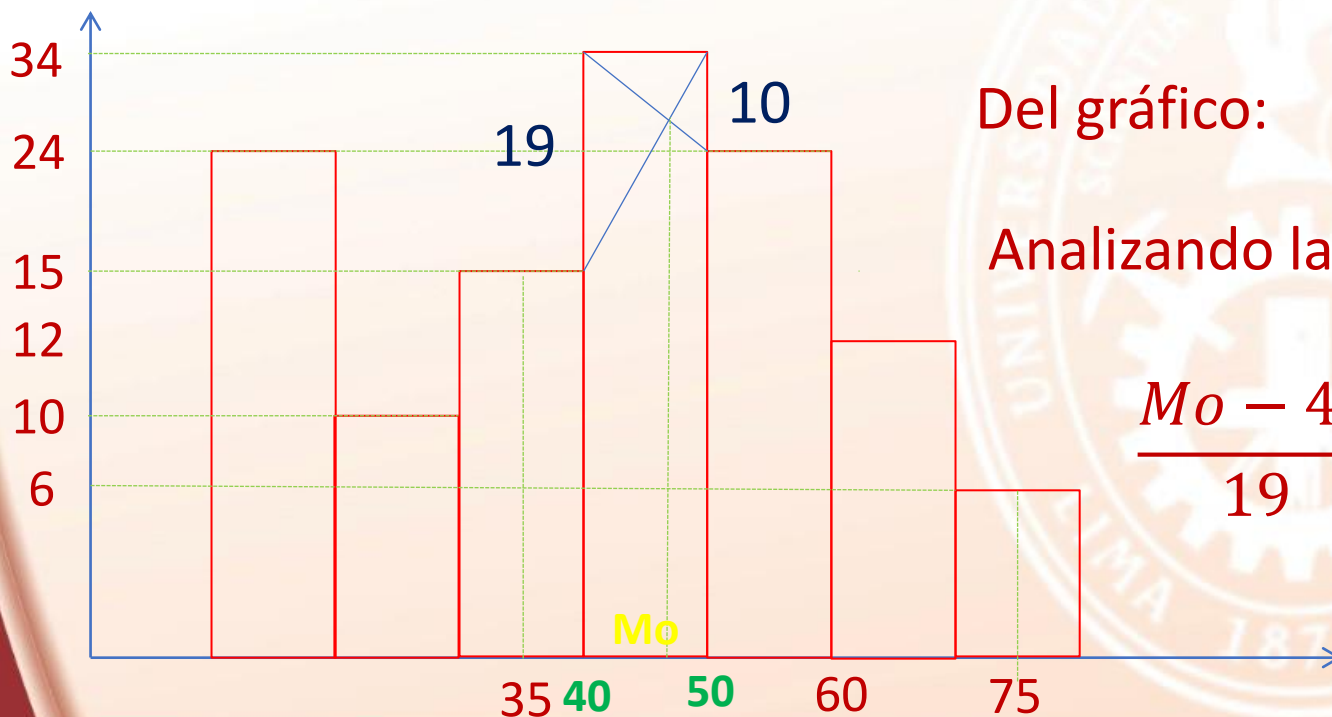
C)47,63

D)48,15

E)49,76

Resolución:

w: ancho de clase



Del gráfico: $35 + 4w = 75$

$w = 10$

Analizando la gráfica:

$$\frac{Mo - 40}{19} = \frac{50 - Mo}{10}$$

$Mo = 46,55$

EJERCICIO N° 234

En una reunión familiar se encontraron 6 primos cuyas edades ordenadas están dadas por 13; a; 17; b; 19 y 20. Todos ellos se dieron cuenta que la media, moda y mediana de sus edades son iguales. Calcule la varianza de dichos datos.

A) 4,8

B) 5

C) 5,2

D) 5,5

E) 6

Resolución:

Si, mediana = moda $\Rightarrow b = 17$

$\rightarrow$ media = 17 $\Rightarrow a = 16$

$$\text{Var}(x) = \frac{(13 - 17)^2 + (16 - 17)^2 + (17 - 17)^2 + (17 - 17)^2 + (19 - 17)^2 + (20 - 17)^2}{6}$$

$$\text{Var}(x) = \frac{4^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2}{6} = 5$$

EJERCICIO N° 235

Se tienen 3 conjuntos de datos A , B y C cuyas varianzas son: $V(A) = 13,25$; $V(B) = 5,22$ y $V(C) = 10,10$ además sus medias $M(A) = 8,3$; $M(B) = 2,78$ y $M(C) = 5,52$; de acuerdo a esto ordene de menor a mayor su grado de homogeneidad.

A) $C < B < A$ B) $A < B < C$ C) $C < A < B$ **D) $A < C < B$** E) $B < C < A$

Resolución:

$$\sqrt{\text{Var}(A)} = 3,6$$

$$\sqrt{\text{Var}(B)} = 2,28$$

$$\sqrt{\text{Var}(C)} = 3,17$$

$$\frac{\sqrt{\text{Var}(A)}}{M(A)} = 0,43$$

$$\frac{\sqrt{\text{Var}(B)}}{M(B)} = 0,82$$

$$\frac{\sqrt{\text{Var}(C)}}{M(C)} = 0,52$$

$$\frac{\sqrt{\text{Var}(A)}}{M(A)} < \frac{\sqrt{\text{Var}(C)}}{M(C)} < \frac{\sqrt{\text{Var}(B)}}{M(B)}$$

EJERCICIO N° 236

La varianza de un grupo de “n” datos es 3,25; la media es 3,5 y la suma de los cuadrados de dichos datos es 62. Al agregar un dato adicional 7 ; calcule varianza de los “n+1” datos.

A)3,72**B)3,82****C)3,91****D)4,52****E)4,56****Resolución:**

$$Var(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$$3,25 = \frac{62}{n} - (3,5)^2 \rightarrow n = 4$$

$$Si, n = 4 \rightarrow \sum_{i=1}^4 x_i = 14 \rightarrow \sum_{i=1}^5 x_i = 21 \Rightarrow \bar{x} = 4,2$$

$$Var(x) = \frac{62 + 49}{5} - (4,2)^2 = 4,56$$

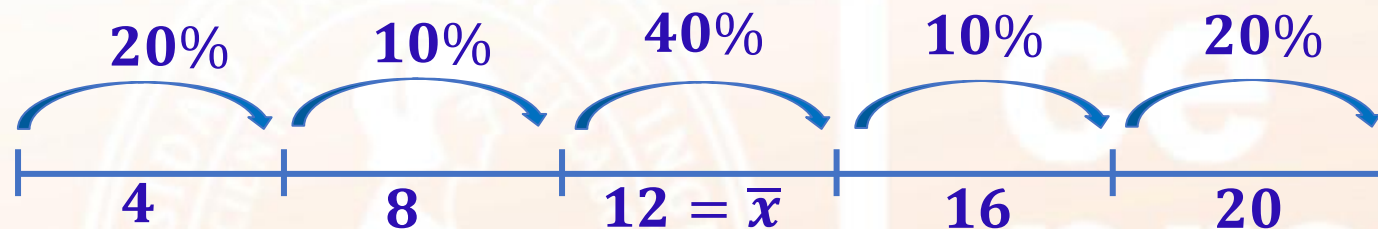
EJERCICIO N° 237

La siguiente tabla muestra la distribución simétrica, con ancho de clase común. Calcule la desviación estándar.

A) 5,02 **B) 5,37** C) 6,04 D) 6,85 E) 7,04

Resolución:

l_i	x_i	h_i	H_i
$[-6)$			
$[-)$		0,1	
$[-)$			0,7
$[-)$	16		
$[;]$		0,2	



$$Var(x) = \left(\sum_{i=1}^5 x_i^2 h_i \right) - (12)^2 = 28,8$$

$$\sqrt{Var(A)} = 5,37$$

PROBLEMA 238

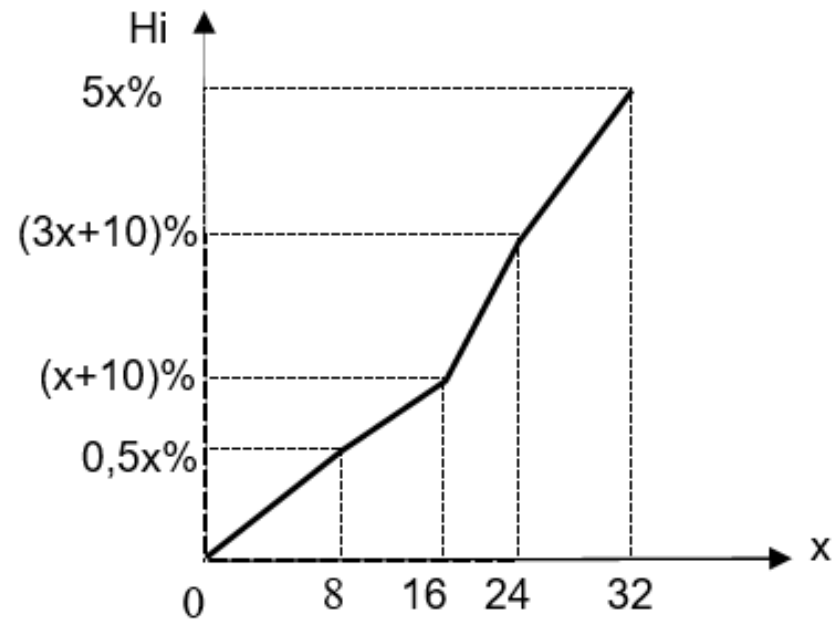
Calcule la diferencia de la mediana y la media de los datos mostrados en la siguiente ojiva

- A) 0,4 B) 0,5 C) 0,6 D) 0,7 **E) 0,8**

Resolución

Del gráfico

$$5x\% = 100\% \Rightarrow x = 20$$



INTERVALO	X_i	h_i	H_i
[0 , 8)	4	0,1	0,1
[8 , 16)	12	0,2	0,3
[16 , 24)	20	0,4	0,7
[24 , 32)	28	0,3	1

Calculando la media

$$\bar{x} = 4 * 0,1 + 12 * 0,2 + 20 * 0,4 + 28 * 0,3$$

$$\bar{x} = 19,2$$

Calculando la mediana

$$Me = 16 + 8 \left(\frac{\frac{1}{2} - 0,3}{0,4} \right) = 20$$

$$\therefore Me - \bar{x} = 0,8$$

PROBLEMA 239

La varianza de un grupo de 20 datos es 33,25; la media es 10,5. Al agregar a dichos números el número 20, calcule la varianza de los 21 datos.

A)34,18

B)35,76

C)36,91

D)37,52

E) 38,56

Resolución

Por dato $\bar{x} = 10,5$ y $V(x) = 33,25$

$$10,5 = \bar{x} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i$$

$$\Rightarrow 210 = \sum_{i=1}^{20} x_i$$

Nueva
media

$$\bar{y} = \frac{210 + 20}{21} = 10,95$$

Recordar

$$V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - [\bar{x}]^2$$

$$33,25 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - [10,5]^2$$

$$\Rightarrow 2870 = \sum_{i=1}^{20} x_i^2$$

$$V(y) = \frac{1}{21} \left(\sum_{i=1}^{20} x_i^2 + 20^2 \right) - [10,95]^2$$

$$\therefore V(y) = 35,76$$

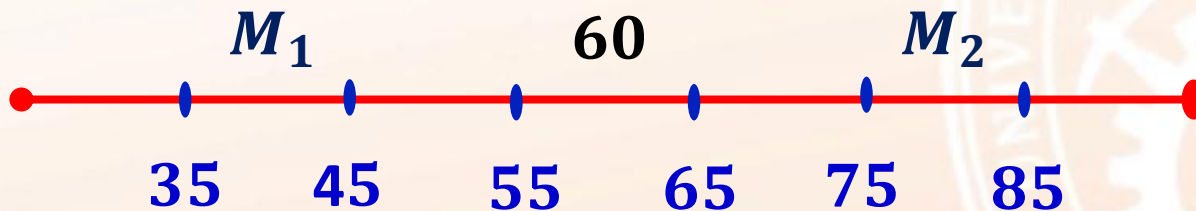
PROBLEMA 240

Se tiene una distribución simétrica bimodal con ancho de clase común igual a 10, donde su mediana y media son iguales a 60. Calcule la diferencia de las modas.

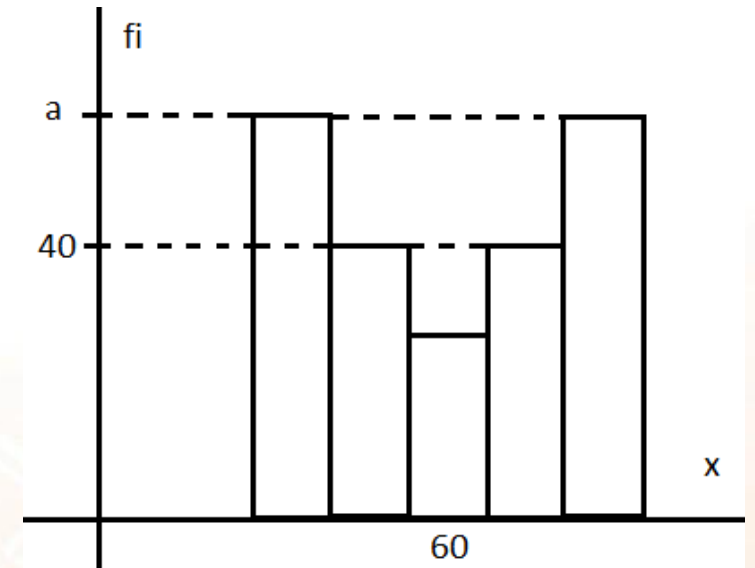
- A) $40 - 200/(a - 20)$ B) $20 - 200/(a + 20)$
 C) $40 - 20a/(a + 10)$ D) $20 - 20a/(a + 10)$
 E) $40 + 100/(a - 20)$

Resolución

Por la simetría y ancho de clase 10



$$M_2 - M_1 = 75 + 10 \left(\frac{a - 40}{2a - 40} \right) - 35 - 10 \left(\frac{a}{2a - 40} \right) = 40 - \frac{200}{a - 20}$$



Recordar

$$M_o = L_i + W \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$$